

احتمال مهندسی

فصل چهارم و پنجم: متغیر تصادفی گسسته و پیوسته

سید مهدی سجادیه



- تعاریف تابع احتمال، تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس و ...
- متغیرهای تصادفی مهم گسسته
- متغیرهای تصادفی پیوسته

تابع توزیع تجمعی

- تابع احتمال: میزان احتمال در هر نقطه

- تابع توزیع تجمعی ($F_X(a)$): مجموع احتمال از منفی بینهایت تا نقطه a یا

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{x \leq a} P(X = x)$$

- دقت کنید $F_X(a)$ یک تابع احتمال است پس مقدار آن بین صفر تا یک است.

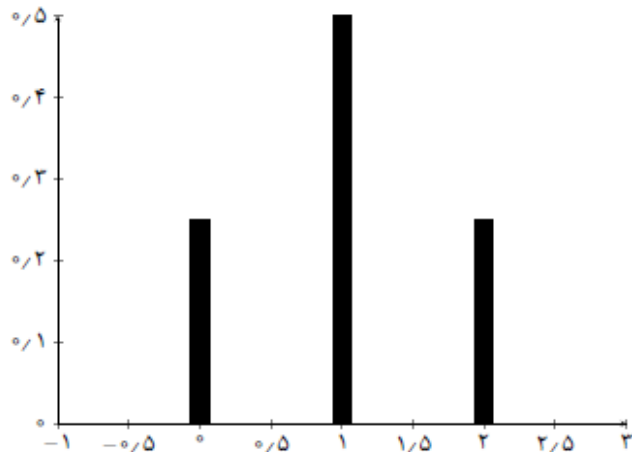
مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۲ سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر در این آزمایش X را تعداد شیرهای رو آمده در نظر بگیریم، مقادیر X به‌ازای برآمدهای آزمایش و احتمال هر یک به صورت زیر خواهد بود:

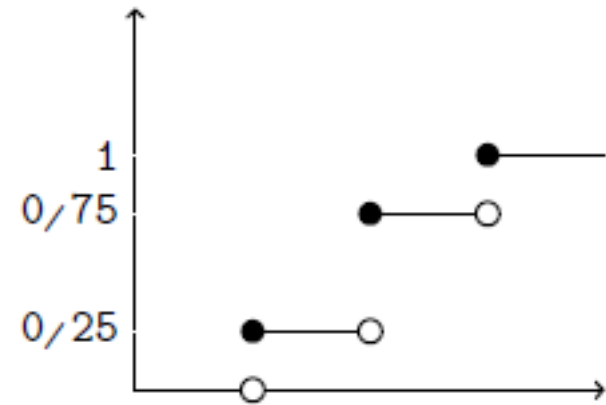
$$\Pr\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{X = 2\} = \frac{1}{4}$$



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

ویژگی های تابع توزیع تجمعی

- $F_X(a)$ یک تابع غیر نزولی است.

- از سمت راست پیوسته است

- حد در بینهایت و منفی بینهایت

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$$

- با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی داریم: (a^- : حد سمت چپ عدد a)

$$\Pr\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$$

$$\Pr\{X \leq a\} = F(a)$$

$$\Pr\{X > a\} = 1 - F(a)$$

$$\Pr\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

$$\Pr\{X \geq a\} = 1 - F(a^-)$$

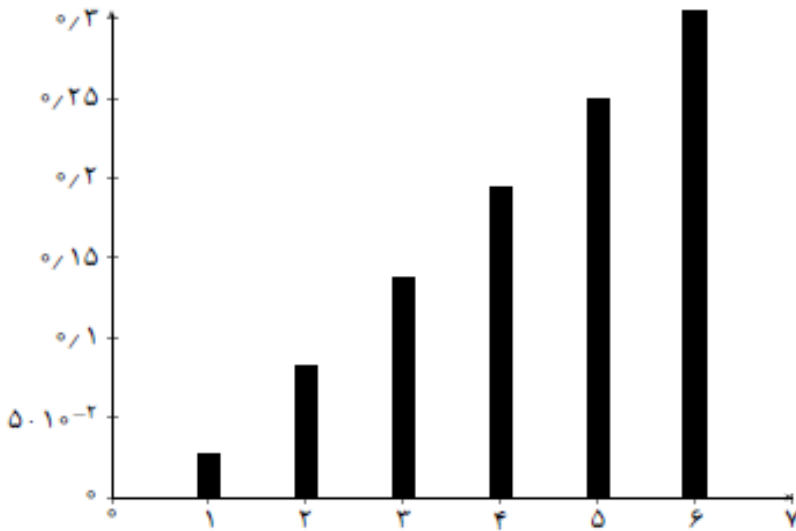
$$\Pr\{a \leq X < b\} = F(b^-) - F(a^-)$$

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b^-) - F(a)$$

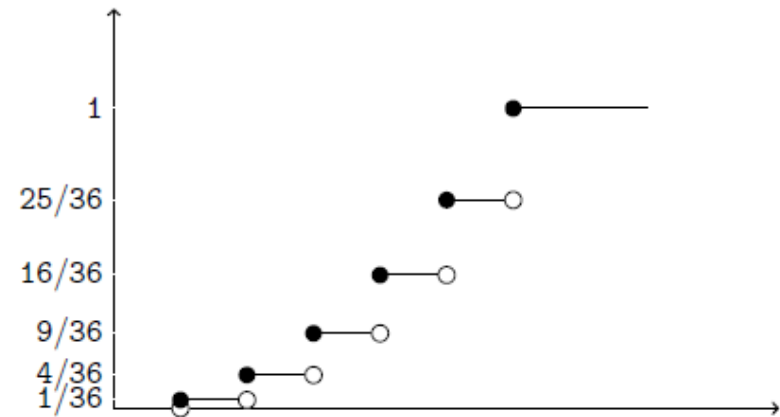
در نقاطی که احتمال غیر صفر است
پرش وجود دارد

مثال

- اگر در پرتاب دو تاس ماکزیمم دو مقدار پرتاب شده را در نظر بگیریم تابع احتمال و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر خواهد بود



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X = i\} = \frac{c\alpha^i}{i!}$$

الف) c را محاسبه کنید.

ب) $P\{X > 1\}$ را تعیین کنید.

• حل:

• یادآوری

• الف) مجموع احتمالات باید یک باشد پس داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c\alpha^i}{i!} = c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} = ce^{\alpha} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e^{\alpha}} = e^{-\alpha}$$

• ب)

$$P\{X > 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\})$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-\alpha} \alpha^0}{0!} + \frac{e^{-\alpha} \alpha^1}{0!} \right) = 1 - e^{-\alpha} (\alpha + 1)$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد تابع احتمال را به دست آورید.

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < \frac{7}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} \leq b \end{cases}$$

- حل: همان طور که بیان شد فقط در نقاط نا پیوستگی احتمال غیر صفر وجود دارد که سه نقطه نا پیوستگی در این تابع است:

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0^-\} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1\} - P\{X = 1^-\} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P\{X = \frac{7}{3}\} = P\{X = \frac{7}{3}\} - P\{X = \frac{7}{3}^-\} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

مثال

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{2} & 1 \leq b < 2 \\ 1 & 2 \leq b \end{cases}$$

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

- الف) $P\{X=i\}, i=0,1,2$ را محاسبه کنید. ب) $P\{0.5 < X < 1.6\}$ را محاسبه کنید.

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0^-\} = \frac{0}{4} - 0 = 0$$

- حل: الف)

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1\} - P\{X = 1^-\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

-

$$P\{X = 2\} = P\{X = 2\} - P\{X = 2^-\} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

- دقت کنید مجموع احتمال در این مثال برابر یک نیست چون پیوسته است و پله ای نیست.

- ب)

$$P\{0.5 < X < 1.6\} = P\{X = 1.6^-\} - P\{X = 0.5\} = \frac{1}{2} + \frac{1.6-1}{4} - \frac{0.5}{4} = \frac{21}{40}$$

امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P\{X=x\}$ باشد در این صورت امید ریاضی که با $E[X]$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

- به عبارت دیگر $E[X]$ که برخی زمانها با μ هم نمایش داده می شود میانگین وزنی از مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی است.
- اگر یک آزمایش به تعداد زیادی انجام پذیرد انتظار داریم که میانگین نتایج امید ریاضی باشد.
- امید ریاضی همانند مرکز ثقل در جسم است.
- امید ریاضی یک عدد **ثابت** است.

هر عدد ثابت یک متغیر تصادفی است با احتمال یک و مقدار متوسط آن برابر مقدار همان عدد ثابت است.

$$E[\alpha] = \alpha$$

امید ریاضی

- مثال متغیر تصادفی نشانه برای پیشامد A به صورت زیر تعریف می شود:
- $I=1$ اگر پیشامد A اتفاق بیفتد
- $I=0$ اگر پیشامد A اتفاق نیفتد
- اگر احتمال پیشامد A برابر $P(A)$ باشد $E[I]$ را محاسبه کنید.

• حل

$$E\{I\} = 0 * P\{I = 0\} + 1 * P\{I = 1\} = 0 * (1 - p(A)) + 1 * p(A) = p(A)$$

- مثال: برای یک تاس با احتمال هم شانس، امید ریاضی را محاسبه کنید.

• حل

$$P\{X = i\} = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^6 i * P\{X = i\} = \sum_{i=1}^6 i * \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2}$$

مثال

- در پرتاب دو سکه، اگر X تعداد شیرها باشد، $E[X]$ چیست؟
- حل: $\{(H;H); (H;T); (T;H); (T;T)\}$

بنابراین

$$\left. \begin{aligned} P\{X = 0\} &= P\{(T, T)\} = \frac{1}{4} \\ P\{X = 1\} &= P\{(T, H), (H, T)\} = \frac{2}{4} \\ P\{X = 2\} &= P\{(H, H)\} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E[X] = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{2}{4} + 2 * \frac{1}{4} = 1$$

مثال

- به یک شرکت کننده در مسابقه ای دو سوال داده می شود و وی می تواند به ترتیب دلخواه یکی از سوالات را انتخاب کند و ر صورتی می تواند سوال دوم را جواب دهد که پاسخ سوال اول را داده باشد. اگر او برای پاسخ صحیح به سوال i ام، v_i ریال جایزه دریافت کند. اگر بداند پاسخ صحیح به سوال i ام را با احتمال p_i می داند به چه ترتیبی سوال ها را جواب دهد تا امید ریاضی جایزه او ماکزیمم شود؟

• حل:

- اگر سوال اول را انتخاب کند X مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال اول بدون جایزه است. در صورتی که سوال اول را جواب دهد و سوال دوم را نتواند جواب دهد v_1 می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار v_1+v_2 خواهد برد.

$$\left. \begin{array}{l} P\{X = 0\} = 1 - p_1 \\ P\{X = v_1\} = p_1(1 - p_2) \\ P\{X = v_1 + v_2\} = p_1 p_2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_1[X] = 0 * (1 - p_1) + v_1 * p_1(1 - p_2) + (v_1 + v_2) * p_1 p_2$$

$$E_1[X] = v_1 p_1 + v_2 p_1 p_2$$

ادامه مثال

اگر سوال دوم را انتخاب کند، X مقدار جایزه وی باشد در این صورت وی در صورت جواب ندادن سوال دوم بدون جایزه است. در صورتی که سوال دوم را جواب دهد و سوال اول را نتواند جواب دهد v_2 می برد و در صورت جواب هر دو سوال مقدار v_1+v_2 خواهد برد.

$$\left. \begin{aligned} P\{X = 0\} &= 1 - p_2 \\ P\{X = v_2\} &= p_2(1 - p_1) \\ P\{X = v_1 + v_2\} &= p_1 p_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2[X] = 0 * (1 - p_1) + v_2 * p_2(1 - p_1) + (v_1 + v_2) * p_1 p_2$$

$$E_2[X] = v_2 p_2 + v_1 p_1 p_2$$

در این صورت E_1 و E_2 با هم مقایسه می شود

$$E_2[X] = v_2 p_2 + v_1 p_1 p_2 \stackrel{?}{\leq} E_1[X] = v_1 p_1 + v_2 p_1 p_2$$

$$\Rightarrow v_2 p_2 (1 - p_1) \stackrel{?}{\leq} v_1 p_1 (1 - p_2) \Rightarrow \frac{v_2 p_2}{(1 - p_2)} \stackrel{?}{\leq} \frac{v_1 p_1}{(1 - p_1)}$$

اگر $p_1 = 0$ باشد حتما سوال دوم انتخاب می شود (و بالعکس)

اگر $p_1 = 1$ باشد حتما سوال اول انتخاب می شود (و بالعکس)

اگر $p_1 = 0.1$ و $v_1 = 100$ و $p_2 = 0.3$ و $v_2 = 50$ در این صورت ابتدا سوال دوم انتخاب می شود.

اگر $p_1 = 0.1$ و $v_1 = 1000$ و $p_2 = 0.3$ و $v_2 = 50$ در این صورت ابتدا سوال دوم انتخاب می شود.

مثال

- ۱۲۰ دانش آموز در یک مدرسه برای شرکت در یک اردو به ۳ دسته تقسیم می شوند که دسته اول ۳۰ نفر، دسته دوم ۴۰ نفر و دسته سوم دارای ۵۰ نفر هستند. از این دان آموزان یک دانش آموز به تصادف انتخاب می کنیم اگر X نشان دهنده تعداد اعضای دسته این دانش آموز باشد $E[X]$ را محاسبه کنید.

• حل:

- X سه مقدار ۳۰، ۴۰ و ۵۰ را انتخاب خواهد کرد.

$$\left. \begin{array}{l} P\{X = 30\} = \frac{30}{120} \\ P\{X = 40\} = \frac{40}{120} \\ P\{X = 50\} = \frac{50}{120} \end{array} \right\} \Rightarrow E[X] = 30 * \frac{30}{120} + 40 * \frac{40}{120} + 50 * \frac{50}{120} = \frac{5000}{120} = 41.33$$

چند ویژگی امید ریاضی

- اگر g یک تابع باشد در این صورت

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x).$$

- **مثال:** فرض کنید X یک متغیر تصادفی است که مقادیر -1 ، 0 و 1 را با احتمالهای 0.2 ، 0.3 و 0.5 انتخاب می کند. $E[X^2]$ را محاسبه کنید.

- **حل: راه حل اول**

$$\left. \begin{array}{l} P\{X = -1\} = 0.2 \\ P\{X = 0\} = 0.3 \\ P\{X = 1\} = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow E[X^2] = (-1)^2 * 0.2 + (0)^2 * 0.3 + (1)^2 * 0.5 = 0.7$$

- **راه حل دوم:** با تغییر متغیر $Y=X^2$ ، در این صورت Y تنها می تواند 0 و 1 باشد

$$\left. \begin{array}{l} P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 0.3 \\ P\{Y = 1\} = P\{X^2 = 1\} = P\{X = 1 \text{ or } X = -1\} = \\ \quad = P\{X = 1\} + P\{X = -1\} = 0.7 \end{array} \right\} \Rightarrow E[Y] = 0 * 0.3 + 1 * 0.7 = 0.7$$

چند ویژگی امید ریاضی

- ویژگی خطی امید ریاضی

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

- در حالت کلی

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

- **مثال:** در پرتاب اگر به اندازه ۳ برابر حاصل منهای ۵ جایزه دریافت کنیم به طور متوسط چقدر جایزه دریافت می کنیم.

- **حل:** اگر X نشان دهنده نتیجه تاس باشد در این صورت $Y=3X-5$

$$E[X] = 3.5 \Rightarrow E[Y] = 3 * E[X] - 5 = 5.5$$

واریانس

- امید ریاضی یک کمیت کامل نیست زیرا دو متغیر تصادفی X و Y زیر دارای یک امید ریاضی هستند:

$$X = \begin{cases} 100 & p = \frac{1}{2} \\ -100 & p = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 100000 & p = \frac{1}{2} \\ -100000 & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- واریانس پراکندگی داده ها حول میانگین را واریانس گویند (باید تابع مورد استفاده زوج و صعودی باشد).

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu)^2] = \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E[X^2] - \underbrace{2\mu E[X]}_{2\mu^2} + \mu^2 = \\ &= E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

مثال

- در پرتاب یک تاس اگر X نشان دهنده نتیجه پرتاب تاس باشد واریانس X را محاسبه کنید.

• حل:

$$p\{X = i\} = \frac{1}{6}, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$E[X] = 3.5$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^6 i^2 * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

- چند رابطه مهم ریاضی در محاسبات

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ویژگی های واریانس

• مثال

Recall $P\{Y = 0\} = 1/4$ and $P\{Y = 1\} = 1/2$ and $P\{Y = 2\} = 1/4$.

Then $\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{4}0^2 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{4}2^2 - 1^2 = \frac{1}{2}$.

$$E[a] = a, \text{Var}(a) = 0$$

- چند ویژگی مهم واریانس
- واریانس عدد ثابت a
- واریانس همیشه مثبت است
- واریانس ترکیب خطی

$$E[aX + b] = aE[X] + b, \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

- انحراف از معیار

$$SD(X) = \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

متغیر تصادفی نرمال شده

متغیر تصادفی نرمال شده X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma_X}$$

۱. ویژگی اول متغیر تصادفی نرمال شده:

$$E[X^*] = 0$$
$$E[X^*] = E\left(\frac{1}{\sigma_X}X - \frac{E[X]}{\sigma_X}\right) = \left(\frac{E[X]}{\sigma_X}\right) - \left(\frac{E[X]}{\sigma_X}\right) = 0$$

۲. ویژگی دوم متغیر تصادفی نرمال شده:

$$\text{Var}(X^*) = 1$$
$$\text{Var}[X^*] = \text{Var}\left(\frac{1}{\sigma_X}X - \frac{E[X]}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} \text{Var}(X) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$

تابع گشتاور و مولد گشتاور

- گشتاور مرتبه k ام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[X^k] = \sum_{x:P_X(x)>0} x^k P_X(X=x)$$

- گشتاور مرتبه اول همان امید ریاضی
- گشتاور مرتبه دوم و اول برای محاسبه واریانس

- تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{x:P_X(x)>0} e^{tx} P_X(X=x)$$

- محاسبه گشتاور مرتبه k ام از تابع مولد گشتاور:

$$E[X^k] = \left. \frac{d^k E[e^{tX}]}{dt^k} \right|_{t=0}$$

- برای محاسبه بسیاری از متغیرهای تصادفی محاسبه امید ریاضی و واریانس از تابع مولد گشتاور استفاده می شود.

مثال

- تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی حاصل از پرتاب تاس را به دست آورید و با استفاده از آن امید ریاضی و واریانس محاسبه کنید.

• حل:

$$E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} e^{ti} = \frac{1}{6} (e^t + e^{2t} + \dots + e^{6t})$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} \frac{1}{6} (e^t + e^{2t} + \dots + e^{6t}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{6} (e^t + 2e^{2t} + \dots + 6e^{6t}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{6} (1 + 2 + \dots + 6) = 3.5$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{6} (e^t + e^{2t} + \dots + e^{6t}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{6} (e^t + 4e^{2t} + \dots + 36e^{6t}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{6} (1 + 4 + \dots + 36) = \frac{91}{6}$$

• محاسبه واریانس

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

متغیرهای تصادفی مهم

- متغیر تصادفی برنولی
- متغیر تصادفی دو جمله ای
- متغیر تصادفی پواسون
- متغیر تصادفی فوق هندسی
- متغیر تصادفی دو جمله ای منفی
- ...

متغیر تصادفی برنولی

فرض کنید آزمایشی انجام گیرد که نتیجه آن را بتوان به یکی از دو حالت موفقیت و شکست تقسیم‌بندی نمود. وقتی که موفقیت حاصل می‌شود متغیر تصادفی برابر ۱ و وقتی شکست حاصل می‌شود آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. به این متغیر تصادفی یک متغیر تصادفی برنولی^۵ می‌گویند (به یاد یکی از برنولی‌ها به نام جیمز برنولی).

توزیع برنولی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود:

$$p_X(0) = \Pr[X = 0] = 1 - p$$

$$p_X(1) = \Pr[X = 1] = p$$

متغیر تصادفی برنولی

فرض کنید آزمایشی انجام گیرد که نتیجه آن را بتوان به یکی از دو حالت موفقیت و شکست تقسیم‌بندی نمود. وقتی که موفقیت حاصل می‌شود متغیر تصادفی برابر ۱ و وقتی شکست حاصل می‌شود آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. به این متغیر تصادفی یک متغیر تصادفی برنولی^۵ می‌گویند (به یاد یکی از برنولی‌ها به نام جیمز برنولی).

توزیع برنولی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود:

$$p_X(0) = \Pr[X = 0] = 1 - p$$

$$p_X(1) = \Pr[X = 1] = p$$

امید ریاضی و واریانس

$$\left. \begin{aligned} E[X] &= 0 * (1 - p) + 1 * p = p \\ E[X^2] &= 0^2 * (1 - p) + 1^2 * p = p \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

متغیر تصادفی دو جمله‌ای

فرض کنید n آزمایش مستقل که هر کدام با احتمال p به موفقیت و با احتمال $1-p$ به شکست منجر می‌شوند را انجام داده و X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش در نظر گرفته شود. آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای^۶ با پارامتر (n, p) گویند. بنابراین متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $(1, p)$ است. تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) به صورت زیر است:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

متغیر تصادفی دو جمله‌ای

فرض کنید n آزمایش مستقل که هر کدام با احتمال p به موفقیت و با احتمال $1-p$ به شکست منجر می‌شوند را انجام داده و X نشان دهنده تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش در نظر گرفته شود. آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای^۶ با پارامتر (n, p) گویند. بنابراین متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $(1, p)$ است. تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) به صورت زیر است:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

• برای محاسبه امید ریاضی و واریانس از تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم:

• یاد آوری

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

• محاسبه تابع مولد گشتاور

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} = \\ &= (e^t p + 1 - p)^n \end{aligned}$$

محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای

• امید ریاضی

$$E[X] = \frac{dE[e^{tX}]}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(e^t p + 1 - p)^n}{dt} \Big|_{t=0} = n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1} \Big|_{t=0} = np$$

• گشتاور دوم

$$E[X^2] = \frac{d^2 E[e^{tX}]}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d(n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1})}{dt} \Big|_{t=0}$$
$$= \{n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1} + n(n-1)(pe^t)^2(e^t p + 1 - p)^{n-2}\} \Big|_{t=0} = np + n(n-1)p^2$$

• محاسبه واریانس

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای

• امید ریاضی

$$E[X] = \frac{dE[e^{tX}]}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(e^t p + 1 - p)^n}{dt} \Big|_{t=0} = n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1} \Big|_{t=0} = np$$

• گشتاور دوم

$$E[X^2] = \frac{d^2 E[e^{tX}]}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d(n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1})}{dt} \Big|_{t=0}$$
$$= \{n(pe^t)(e^t p + 1 - p)^{n-1} + n(n-1)(pe^t)^2 (e^t p + 1 - p)^{n-2}\} \Big|_{t=0} = np + n(n-1)p^2$$

• محاسبه واریانس

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

• بیشترین مقدار احتمال برای نقطه صحیحی است که نزدیکترین مقدار به np را دارد.

• محاسبات برای n های بزرگ نسبتاً پیچیده است

• تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی دو جمله ای

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{t \leq a} P(X = t) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \sum_{t=0}^{\lfloor a \rfloor} P\{X = t\} & 0 \leq a < n \\ 1 & a \leq n \end{cases}$$

• متغیر تصادفی دو جمله ای مهمترین تابع توزیع احتمال است

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه را شامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه را شامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- **حل**
- الف) باید حداقل ۸ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند

$$P\{X \geq 8\} = \sum_{t=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

مثال

- هیات منصفه یک دادگاه را شامل ۱۲ نفر در نظر بگیرید. شخص متهم به شرطی مجرم شناخته می شود که حداقل ۸ نفر از اعضای هیات منصفه به مجرم بودن او رای دهند. اگر اعضای هیات منصفه مستقل از هم با احتمال θ رای صحیح دهند
- الف) با چه احتمالی فرد مجرم را صحیح تشخیص می دهند.
- ب) با چه احتمالی فرد غیر مجرم را صحیح تشخیص می دهند.

• حل

- الف) باید حداقل ۸ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند

$$P\{X \geq 8\} = \sum_{t=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

- ب) باید حداقل ۵ نفر از هیات منصفه درست تشخیص دهند (زیرا اگر ۷ نفر هم اشتباه تشخیص دهند مشکلی نباشد)

$$P\{X \geq 5\} = \sum_{t=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

متغیر تصادفی پواسون

- متغیر تصادفی X که همه مقادیر صحیح نامنفی (۰، ۱، ۲، ...) را انتخاب می کند را متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ گوئیم هر گاه تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$P\{X = i\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

متغیر تصادفی پواسون

- متغیر تصادفی X که همه مقادیر صحیح نامنفی ($0, 1, 2, \dots$) را انتخاب می کند را متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ گوئیم هر گاه تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$P\{X = i\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- دقت کنید مجموع احتمال باید ۱ است.
- محاسبه تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda}$$

محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پواسون

- امید ریاضی

$$E[X] = \frac{dE[e^{tX}]}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(e^{-\lambda} e^{\lambda e^t})}{dt} \Big|_{t=0} = e^{-\lambda} \lambda e^t e^{\lambda e^t} \Big|_{t=0} = \lambda$$

- گشتاور دوم

$$E[X^2] = \frac{d^2 E[e^{tX}]}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d(e^{-\lambda} \lambda e^t e^{\lambda e^t})}{dt} \Big|_{t=0}$$
$$= \{e^{-\lambda} \lambda e^t e^{\lambda e^t} + e^{-\lambda} (\lambda e^t)^2 e^{\lambda e^t}\} \Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

- محاسبه واریانس

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

مثال

- فرض کنید تعداد غلط‌های تایپی در یک صفحه از کتاب یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد احتمال آنکه در این صفحه حداقل دو خطا باشد چقدر است؟

مثال

- فرض کنید تعداد غلطهای تایپی در یک صفحه از کتاب یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد احتمال آنکه در این صفحه حداقل دو خطا باشد چقدر است؟

• حل:

$$\begin{aligned}P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X < 2\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\}) \\&= 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\&= 1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

رابطه متغیر تصادفی پواسون و دو جمله ای

- هرگاه در متغیر تصادفی دو جمله ای n عدد بزرگ و p عدد کوچکی باشد می توان آن را با متغیر تصادفی پواسون تقریب زد ($\lambda=np$):

- چند مثال

- تعداد غلط های تایپی در یک صفحه
- افرادی که در یک کشور بیشتر از ۱۰۰ سال دارند
- تعداد زلزله ها در یک شهر
- تعداد تلفن های اشتباه

- دقت کنید وقتی p کوچک باشد $\text{Var}(X)=np(1-p)\approx np$

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر 0.1 است. احتمال آنکه در یک نمونه 10 تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰,۱ است. احتمال آنکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟

• حل:

- راه حل اول استفاده از متغیر تصادفی دو جمله

$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \binom{10}{0}(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.9)^9(0.1) = 0.736$$

•

مثال

- فرض کنید احتمال آنکه یک قطعه تولید شده در یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰,۱ است. احتمال آنکه در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر شامل یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟

• حل:

- راه حل اول استفاده از متغیر تصادفی دو جمله

$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \binom{10}{0} (0.9)^{10} + \binom{10}{1} (0.9)^9 (0.1) = 0.736$$

- راه حل دوم تقریب با پواسون

$$\lambda = np = 10 * 0.1 = 1$$

$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{e^{-1} * 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} * 1^1}{1!} = 0.7358$$

ویژگی متغیر تصادفی پواسون

- اگر در یک فرآیند پواسون λ بر اساس اتفاقات بر واحدی (مانند زمان باشد) با تغییر واحد می توان به یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ' جدید رسید
- مثال:
- ۱ غلط در یک صفحه \rightarrow ۲ غلط در دو صفحه
- ۱ ورود در دقیقه \rightarrow ۶۰ ورود در یک ساعت

ویژگی متغیر تصادفی پواسون

- اگر در یک فرآیند پواسون λ بر اساس اتفاقات بر واحدی (مانند زمان باشد) با تغییر واحد می توان به یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ' جدید رسید
- مثال:
- ۱ غلط در یک صفحه \rightarrow ۲ غلط در دو صفحه
- ۱ ورود در دقیقه \rightarrow ۶۰ ورود در یک ساعت
- مثال: فرض کنید نرخ وقوع زلزله در یکی از شهرهای ژاپن یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۲ زلزله در سال است. احتمالاً آنکه در دو سال آینده ۳ زلزله اتفاق افتد چقدر است <

ویژگی متغیر تصادفی پواسون

- اگر در یک فرآیند پواسون λ بر اساس اتفاقات بر واحدی (مانند زمان باشد) با تغییر واحد می توان به یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ' جدید رسید
- مثال:
- ۱ غلط در یک صفحه \rightarrow ۲ غلط در دو صفحه
- ۱ ورود در دقیقه \rightarrow ۶۰ ورود در یک ساعت
- مثال: فرض کنید نرخ وقوع زلزله در یکی از شهرهای ژاپن یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۲ زلزله در سال است. احتمالاً آنکه در دو سال آینده ۳ زلزله اتفاق افتد چقدر است <
- حل: $\lambda=2$ در سال نتیجه می دهد $\lambda'=4$ در دو سال

$$P\{X = 3\} = \frac{e^{-4} * 4^3}{3!}$$

متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید آزمایش‌های مستقلی را که هر کدام احتمال موفقیت p را دارند، آنقدر تکرار کنیم تا یک موفقیت حاصل شود. اگر X نشان دهنده تعداد تکرار آزمایش‌های لازم باشد، به آن یک متغیر تصادفی هندسی^۱ می‌گویند.

تعریف ۱ توزیع هندسی با پارامتر p تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود.

$$\Pr\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید آزمایش‌های مستقلی را که هر کدام احتمال موفقیت p را دارند، آنقدر تکرار کنیم تا یک موفقیت حاصل شود. اگر X نشان دهنده تعداد تکرار آزمایش‌های لازم باشد، به آن یک متغیر تصادفی هندسی^۱ می‌گویند.

تعریف ۱ توزیع هندسی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود.

$$\Pr\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

• امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی هندسی (محاسبه تابع مولد گشتاور)

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1} p = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (e^t (1-p))^k \left(\frac{p}{1-p}\right) =$$

$$\frac{p}{1-p} \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)_{t=0} = \frac{pe^t(1-(1-p)e^t) + pe^t(1-p)e^t}{(1-(1-p)e^t)^2} \Big|_{t=0} \quad E[X^2] = \dots = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$= \frac{p^2 + p(1-p)}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

متغیر تصادفی دو جمله ای منفی

- فرض کنید یک دنباله از آزمایش های تصادفی برنولی را آنقدر تکرار می کنیم تا r موفقیت کسب شود. اگر تعداد آزمایش های لازم برای به دست آوردن r موفقیت متغیر تصادفی باشد در این صورت تابع احتمال به صورت زیر است:

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-(r-1)} * p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-(r-1)}$$

$$n = r, r+1, r+2, \dots$$

متغیر تصادفی دو جمله ای منفی

- فرض کنید یک دنباله از آزمایش های تصادفی برنولی را آنقدر تکرار می کنیم تا r موفقیت کسب شود. اگر تعداد آزمایش های لازم برای به دست آوردن r موفقیت متغیر تصادفی باشد در این صورت تابع احتمال به صورت زیر است:

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-(r-1)} * p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-(r-1)}$$
$$n = r, r+1, r+2, \dots$$

- برای این متغیر تصادفی تابع مولد گشتاور و امید ریاضی و واریانس عبارتند از:

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=r}^{\infty} e^{tk} \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r = \dots = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right]$$

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

$$E[X^2] = \frac{r}{p} \left(\frac{r+1}{p} - 1 \right) \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

متغیر تصادفی پیوستہ

متغیر تصادفی پیوسته

- متغیرهای که مقادیر آنها شمارش ناپذیر است

- زمان رسیدن به ایستگاه قطار

- انتخاب عددی بین صفر و یک

- احتمال در یک نقطه صفر است

- اصولاً فاصله مهم است نه یک نقطه

تابع چگالی احتمال

- یک متغیر تصادفی پیوسته (یک بعدی) است اگر تابع غیر منفی $f_X(x)$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر زیر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$P\{X \in B\} = \int_{x \in B} f_X(x) dx$$

- به تابع $f_X(x)$ ، تابع چگالی احتمال گوییم.

تابع چگالی احتمال

- یک متغیر تصادفی پیوسته (یک بعدی) است اگر تابع غیر منفی $f_X(x)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$P\{X \in B\} = \int_{x \in B} f_X(x) dx$$

- به تابع $f_X(x)$ ، تابع چگالی احتمال گوئیم.
- ویژگی های تابع چگالی احتمال
- ۱- $f_X(x)$ تابع غیر منفی

$$2 - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$3 - P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx$$

تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته (جمع تبدیل به انتگرال می شود)

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P\{a < X < B\} = F_X(b) - F_X(a)$$

- امید ریاضی

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته (جمع تبدیل به انتگرال می شود)

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P\{a < X < B\} = F_X(b) - F_X(a)$$

- امید ریاضی

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- واریانس

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx \right)^2$$

$$E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

- تابع مولد گشتاور

مثال:

- ▶ Suppose $f(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in [0, 2] \\ 0 & x \notin [0, 2]. \end{cases}$
- ▶ What is $P\{X < 3/2\}$?
- ▶ What is $P\{X = 3/2\}$?
- ▶ What is $P\{1/2 < X < 3/2\}$?
- ▶ What is $P\{X \in (0, 1) \cup (3/2, 5)\}$?
- ▶ What is F ?
- ▶ $F(a) = F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ a/2 & 0 < a < 2 \\ 1 & a \geq 2 \end{cases}$
- ▶ In general $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$.

مثال

• فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

الف) مقدار c را به دست آورید. ب) $P\{X > 1.5\}$ را محاسبه کنید.

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) مقدار c را به دست آورید. ب) $P\{X > 1.5\}$ را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_0 + \underbrace{\int_0^2 c(4x - 2x^2) dx}_{c(2x^2 - \frac{2x^3}{3})|_0^2 = c \cdot \frac{8}{3}} + \int_2^{\infty} 0 dx = \frac{8c}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

مثال

• فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) مقدار c را به دست آورید. ب) $P\{X > 1.5\}$ را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_0 + \underbrace{\int_0^2 c(4x - 2x^2) dx}_{c(2x^2 - \frac{2x^3}{3})|_0^2 = c \cdot \frac{8}{3}} + \int_2^{\infty} 0 dx = \frac{8c}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

ب)

$$P\{X > 1.5\} = \int_{1.5}^2 \frac{3}{8} (4x - 2x^2) dx = \frac{3}{8} (2x^2 - \frac{2x^3}{3}) \Big|_{1.5}^2 =$$

$$\frac{3}{8} (2x^2 - \frac{2x^3}{3}) \Big|_{1.5}^2 = \frac{3}{8} * (8 - \frac{16}{3} - (2 * (1.5)^2 - \frac{2(1.5)^3}{3})) = \dots$$

مثال

- مدت زمان کارکرد یک کامپیوتر بر حسب ساعت به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{\frac{-x}{100}} & 0 \leq x \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

- الف) مقدار c را به دست آورید. ب) با چه احتمالی کامپیوتر بین ۵۰ تا ۱۵۰ ساعت کار می کند. پ) امید ریاضی X را به دست آورید.

مثال

- مدت زمان کارکرد یک کامپیوتر بر حسب ساعت به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{\frac{-x}{100}} & 0 \leq x \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- الف) مقدار c را به دست آورید. ب) با چه احتمالی کامپیوتر بین ۵۰ تا ۱۵۰ ساعت کار می کند. پ) امید ریاضی X را به دست آورید.

(حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_0 + \int_0^{\infty} ce^{\frac{-x}{100}} dx = c(-100)e^{\frac{-x}{100}} \Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow 100c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{100}$$

(ب)

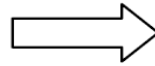
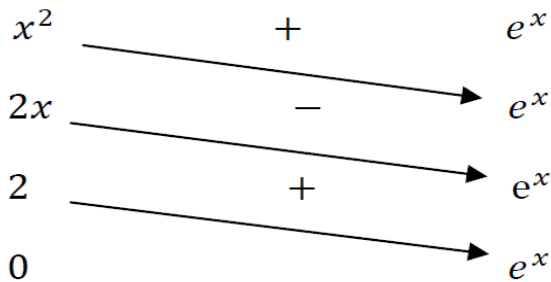
$$P\{50 < X < 150\} = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx = -e^{-\frac{x}{100}} \Big|_{50}^{150} = e^{-0.5} - e^{1.5} = \dots$$

ادامه حل مثال

- (پ) یادآوری روش نردبانی در انتگرال $\int f(x)g(x)dx$

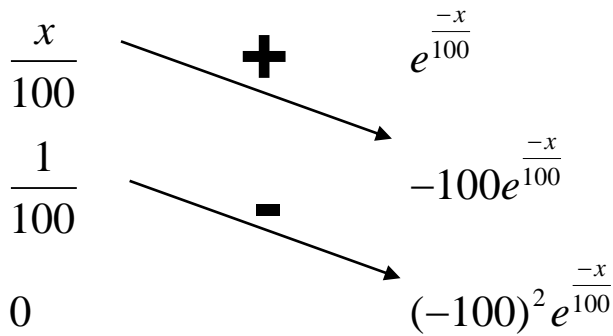
$f(x)$ ومشتقاتش

$g(x)$ وانتگرال هایش



$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

- برای محاسبه $E[X]$ داریم:



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x * 0 dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx =$$

$$\left\langle \frac{x}{100} (-100 e^{-\frac{x}{100}}) - \frac{1}{100} ((-100)^2 e^{-\frac{x}{100}}) \right\rangle_0^{\infty} = 100$$

مثال (ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین $۱,۲۵$ و تابع چگالی زیر باشد $a+b$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ b & 1 \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثال (ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین ۱,۲۵ و تابع چگالی زیر باشد $a+b$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ b & 1 \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- حل: علاوه بر امید ریاضی که مشخص است باید انتگرال تابع چگالی برابر ۱ باشد

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^a b dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + bx \Big|_1^a = \frac{1}{3} + b(a-1) \Rightarrow \frac{2}{3} = b(a-1) \quad \Delta$$

$$1.25 = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^a bxdx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{bx^2}{2} \Big|_1^a = \frac{1}{4} + \frac{b}{2}(a^2 - 1) \Rightarrow 1 = \frac{b}{2}(a^2 - 1) \quad \Delta\Delta$$

مثال (ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین ۱,۲۵ و تابع چگالی زیر باشد $a+b$ را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ b & 1 \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- حل: علاوه بر امید ریاضی که مشخص است باید انتگرال تابع چگالی برابر ۱ باشد

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^a b dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + bx \Big|_1^a = \frac{1}{3} + b(a-1) \Rightarrow \frac{2}{3} = b(a-1) \quad \Delta$$

$$1.25 = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^a bxdx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{bx^2}{2} \Big|_1^a = \frac{1}{4} + \frac{b}{2}(a^2 - 1) \Rightarrow 1 = \frac{b}{2}(a^2 - 1) \quad \Delta\Delta$$

- با تقسیم رابطه دوم بر رابطه اول داریم:

$$\frac{\frac{b}{2}(a^2 - 1)}{b(a-1)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{a+1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

یادآوری

متغیر تصادفی گسسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع جرم احتمال	$p_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$P\{X \in A\} = \sum_{x \in A} p_X(x)$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x)$

متغیر تصادفی پیوسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع چگالی احتمال	$f_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$\Pr\{X \in A\} = \int_A f_X(x) dx$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$

متغیرهای تصادفی پیوسته مهم

- متغیر تصادفی یکنواخت

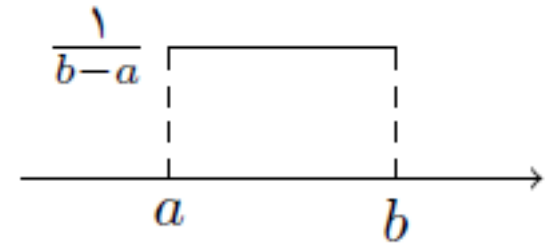
- متغیر تصادفی نرمال

- متغیر تصادفی نمایی

متغیر تصادفی یکنواخت

- تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت ($U[a,b]$)

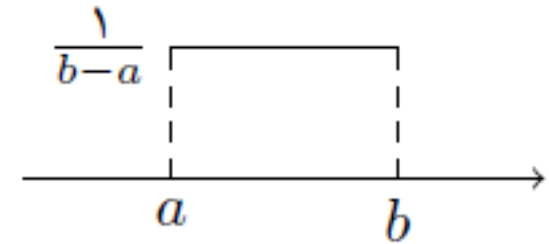
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



متغیر تصادفی یکنواخت

- تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت ($U[a,b]$)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



- تابع توزیع تجمعی

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- امید ریاضی

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

متغیر تصادفی یکنواخت

• واریانس

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + a^2 + ba}{3}$$
$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

• مثال: اگر X به طور یکنواخت در فاصله $(0, 10)$ توزیع شده باشد مطلوب است احتمال های زیر:

• $X < 3$

• $X > 6$

• $3 < X < 8$

• $-1 < X < 4$

متغیر تصادفی یکنواخت

• واریانس

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + a^2 + ba}{3}$$
$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

• مثال: اگر X به طور یکنواخت در فاصله $(0, 10)$ توزیع شده باشد مطلوب است احتمال های زیر:

$$\frac{3}{10} \quad \mathbf{X < 3} \quad \bullet$$

$$\frac{10-6}{10} = \frac{4}{10} \quad \mathbf{X > 6} \quad \bullet$$

$$\frac{8-3}{10} = \frac{5}{10} \quad \mathbf{3 < X < 8} \quad \bullet$$

$$\frac{4-0}{10} = \frac{4}{10} \quad \mathbf{-1 < X < 4} \quad \bullet$$

(حنف $-1 < X < 0$)

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکت می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکت می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.
- حل: الف) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۱۲ تا ۷:۱۵ و یا در بازه ۷:۲۷ تا ۷:۳۰ برسد تا کمتر از سه دقیقه معطل شود پس داریم:

$$P\{12 < X < 15 \cup 27 < X < 30\} = P\{12 < X < 15\} + P\{27 < X < 30\} = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکت می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.
- حل: الف) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۱۲ تا ۷:۱۵ و یا در بازه ۷:۲۷ تا ۷:۳۰ برسد تا کمتر از سه دقیقه معطل شود پس داریم:

$$P\{12 < X < 15 \cup 27 < X < 30\} = P\{12 < X < 15\} + P\{27 < X < 30\} = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

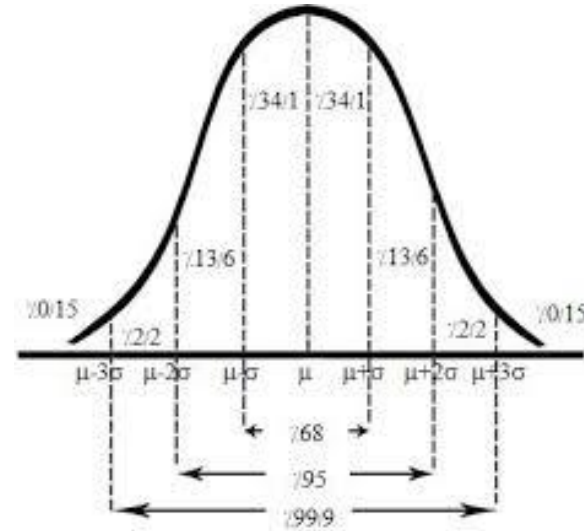
- ب) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۰۰ تا ۷:۰۵ و یا در بازه ۷:۱۵ تا ۷:۲۰ برسد تا بیشتر از ۵ دقیقه معطل شود

$$P\{0 < X < 5 \cup 15 < X < 20\} = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

متغیر تصادفی نرمال

- تابع چگالی متغیر تصادفی نرمال ($N(\mu, \sigma^2)$)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- نکته: محاسبه انتگرال به صورت عددی است
- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی نرمال

$$E[X] = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

متغیر تصادفی نرمال استاندارد

- متغیر تصادفی نرمال Z با میانگین ۰ و واریانس ۱ را متغیر تصادفی نرمال استاندارد گوییم.

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \varphi(x)$$

متغیر تصادفی نرمال استاندارد

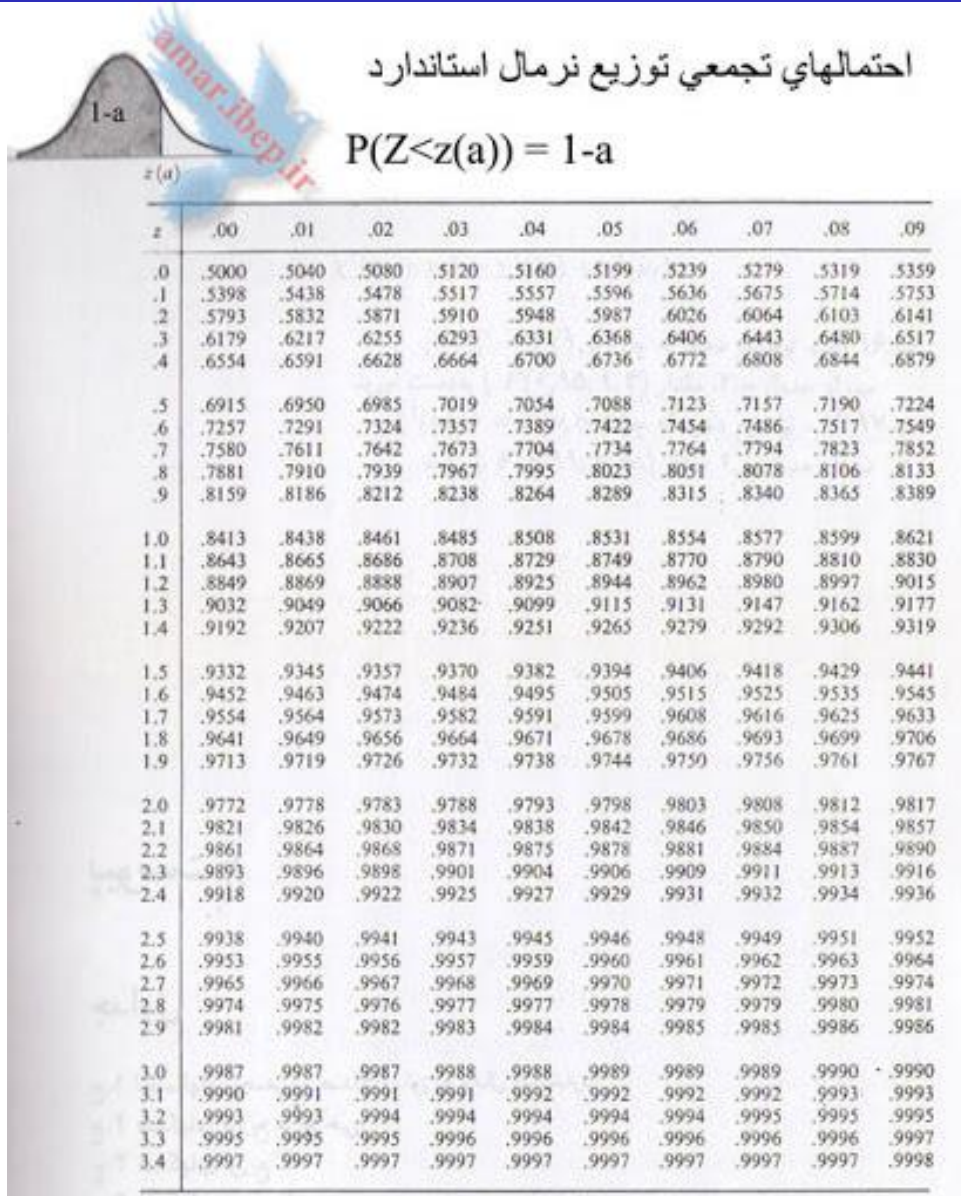
- متغیر تصادفی نرمال Z با میانگین ۰ و واریانس ۱ را متغیر تصادفی نرمال استاندارد گوئیم.

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \varphi(x)$$

- ویژگی های تابع $\varphi(x)$
 - محاسبات به صورت عددی
 - رابطه $\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$
 - جدول محاسباتی

جدول محاسباتی متغیر تصادفی نرمال استاندارد



$$\varphi(1.24) = 0.8925$$

متغیر تصادفی نرمال بر اساس متغیر تصادفی نرمال استاندارد

• فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ و Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. در این صورت

یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است $\frac{X - \mu}{\sigma}$ -

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

مثال

• اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۱۶ باشد مطلوبست محاسبه:

• الف) $P\{1 < X < 6\}$

• ب) $P\{|X-3| > 1\}$

مثال

• اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۱۶ باشد مطلوبست محاسبه:

• الف) $P\{1 < X < 6\}$

• ب) $P\{|X-3| > 1\}$

• حل: $\mu=2$ و $\sigma^2=16$ ($\sigma=4$) در نتیجه

• الف:

$$\begin{aligned} P\{1 < X \leq 6\} &= P\left\{\frac{1-2}{4} < \frac{X-2}{4} \leq \frac{6-2}{4}\right\} = P\left\{-\frac{1}{4} < Z \leq 1\right\} \\ &= \varphi(1) - \varphi(-0.25) = \varphi(1) + \varphi(0.25) - 1 \end{aligned}$$

• ب

$$\begin{aligned} P\{|X-3| > 1\} &= P\{X-3 > 1\} + P\{X-3 < -1\} = P\{X > 4\} + P\{X < 2\} \\ &= P\left\{\frac{X-2}{4} > \frac{4-2}{4}\right\} + P\left\{\frac{X-2}{4} < \frac{2-2}{4}\right\} = \\ &= 1 - \varphi(0.5) + \varphi(0) \end{aligned}$$

مثال

• در یک سیستم مخابراتی دودویی، گیرنده سیگنال $R=x+Z$ را دریافت می کند (Z نرمال استاندارد). در فرستنده به جای عدد صفر عدد $x=-2$ و به جای عدد ۱ عدد $x=2$ ارسال می شود.

اگر در گیرنده با توجه به علامت R سیگنال تشخیص داده شود احتمال خطای گیرنده به شرطی که فرستنده الف ($x=2$ و ب) ($x=-2$) را فرستاده باشد را محاسبه کنید.

مثال

• در یک سیستم مخابراتی دودویی، گیرنده سیگنال $R=x+Z$ را دریافت می کند (Z نرمال استاندارد). در فرستنده به جای عدد صفر عدد $x=-2$ و به جای عدد ۱ عدد $x=2$ ارسال می شود.

اگر در گیرنده با توجه به علامت R سیگنال تشخیص داده شود احتمال خطای گیرنده به شرطی که فرستنده الف ($x=2$ و ب ($x=-2$) را فرستاده باشد را محاسبه کنید.

حل: الف

$$\begin{aligned} P\{error_1\} &= P\{R < 0 \mid x = 2\} = P\{x + Z < 0 \mid x = 2\} = P\{2 + Z < 0\} \\ &= P\{Z < -2\} = \varphi(-2) = 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

مثال

• در یک سیستم مخابراتی دودویی، گیرنده سیگنال $R=x+Z$ را دریافت می کند (Z نرمال استاندارد). در فرستنده به جای عدد صفر عدد $x=-2$ و به جای عدد ۱ عدد $x=2$ ارسال می شود.

اگر در گیرنده با توجه به علامت R سیگنال تشخیص داده شود احتمال خطای گیرنده به شرطی که فرستنده الف ($x=2$ و ب ($x=-2$) را فرستاده باشد را محاسبه کنید.

حل: الف

$$\begin{aligned} P\{error_1\} &= P\{R < 0 \mid x = 2\} = P\{x + Z < 0 \mid x = 2\} = P\{2 + Z < 0\} \\ &= P\{Z < -2\} = \varphi(-2) = 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned} P\{error_0\} &= P\{R > 0 \mid x = -2\} = P\{x + Z > 0 \mid x = -2\} = P\{-2 + Z > 0\} \\ &= P\{Z > 2\} = 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

سپاس

